Cálculo integral

Temas vistos durante todo el semestre

- Sumas de Riemann.
- Definición de integral
- Funciones primitivas.
- Integral Indefinida.
  - Integrales directas
  - Integración por sustitución
  - Integral por partes
  - Integración por fracciones parciales
- Integrales definidas
  - Integrales directas
  - Integración por sustitución
  - Integral por partes
  - Integración por fracciones parciales

Temas vistos en el 3er parcial

- Integral Indefinida.
  - Integración por fracciones parciales
- Integrales definidas
  - Integrales directas
  - Integración por sustitución
  - Integral por partes
  - Integración por fracciones parciales

Guía 3er parcial

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Las fracciones parciales es un método de integración que permite resolver integrales de ciertas funciones racionales que no se pueden resolver por los otros métodos (formula directa, por partes, cambio de variable, etc.)

para poder comprender mejor el tema ahí que definir que es una fracción raciona; se le llama fracción racional del tipo:

$$\frac{x^3+3x}{x^2-2x-3}$$

cuyo numerador y denominador son polinomios; sin embargo, si el exponente de los términos del numerador es igual o mayor al del denominador, la fracción se transforma a división:

$$\frac{x^3+3x}{x^2-2x-3}=x+2+\frac{10x+6}{x^2-2x-3}$$

Pero, en el caso de una fracción donde el numerador es el el que tiene el exponente menor y el denominador tiene el exponente mayor, la fracción puede transformarse en una suma de fracciones parciales por lo cual en denominador debe esta factorizado:

$$\frac{9}{x-3}+\frac{1}{x+1}=\frac{9(x+1)+x-3}{(x-3)(x+1)}=\frac{9x+9+x-3}{(x-3)(x+1)}=\frac{10x+6}{(x-3)(x+1)}$$

El proceso inverso incluye el uso de fracciones parciales, que tiene como objetivo encontrar la solución de las constantes involucradas:

$$\frac{10x+6}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Una definición mas exacta de el método de fracciones parciales seria:

Se dice que una función racional $\frac{P(X)}{Q(X)}$ es una fracción propia, si el grado del polinomio P(x) es menor que el grado del polinomio Q(x). En caso contrario, es decir, si el grado de P(x) es mayor o igual al de Q(x), la fracción se llama impropia. Toda fracción impropia se puede expresar, efectuando la división, como la suma de un polinomio más una fracción propia.

Es decir,

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = (POLINOMIO) + \frac{N_1(X)}{Q(X)}$$

Existen 4 casos de fracciones parciales:

CASO 1: FACTORES LINEALES DISTINTOS.

En este caso a cada factor lineal de la forma ***ax + b*** del denominador le corresponde una constante, se aumentara en numero de constantes dependiendo de cantos factores se tenga en el denominador.

Nota: Todas las integrales que utilicen este caso su resultado sera el logaritmo natural de cada uno de los factores.

$$\frac{10x+6}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

CASO 2: FACTORES LINEALES REPETIDOS

El numero de factores será igual al grado (exponente) del polinomio; es decir; a cada factor lineal ***ax+b*** que figure ***n*** veces en el denominador le corresponde una suma de fracciones de la forma :

$$\frac{A}{(ax+b)}+\frac{B}{(ax+b)^2}\cdots\cdots\frac{N}{(ax+b)^n}$$

Nota: Una de las integrales correspondientes a este caso da como resultado un logaritmo natural, mientras que las restantes se resuelven mediante un cambio de variables.

$$\frac{z^2}{(z-1)^3}=\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{(Z-1)^2}+\frac{C}{(z-1)^3}$$

CASO 3:FACTORES CUADRÁTICOS DISTINTOS

En este caso a cada factor le corresponderán dos constantes, de las cuales una de estas será el coeficiente del termino lineal. El denominador contiene factores de segundo grado, pero ninguno de estos se repite.
A todo factor no repetido de segundo grado, como

$$x^2+px+q$$

le corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax+B}{X^2+px+q}$$

$$\frac{4x^2-8x+1}{x^2-x+6}=\frac{4x^2-8x+1}{(x+2)(x^2-2x+3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{Bx+C}{(x^2-2x+3)}$$

CASO 4: FACTORES CUADRÁTICOS REPETIDOS

El denominador contiene factores de segundo grado y algunos de estos se repiten.
A todo factor de segundo grado repetido ***n*** veces, como

$$(x^2 + px + q)^n$$

Corresponderá la suma de ***n*** fracciones parciales, de la forma

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^n} + \cdots + \frac{Lx + M}{(x^2 + px + q)^n}$$

EJEMPLO DE CADA UNO DE LOS CASOS:

1. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$

El denominador de dicha fracción se pueda factorizar por factor común:

$$x(x^2 + x + 2)$$

Al obtener estos dos factores debemos percatarnos que estos se puedan reducir lo más posible, el segundo factor se puede factorizar ya que es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ dando como resultado:

$$x(x - 1)(x + 2)$$

De manera que dicha fracción parcial que daría de esta forma:

$$\frac{(2x + 3)\,dx}{x(x - 1)(x + 2)}$$

Posteriormente se acomodan los factores tomando como referencia el caso 1:

$$\frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

Por lo cual A, B y C son constantes a determinar, por lo cual vamos a multiplicar ambos lados de la expresión por el denominador:

$$(2x+3) = A(x-1)(x+2) + B(x)(x+2) + C(x)(x-1)$$

$$2x+3 = Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx$$

Separamos por factor común:

$$2x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A$$

Posteriormente vamos a igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los dos términos del lado izquierdo, de manera que obtendremos tres ecuaciones:

$$A+B+C=0$$

$$A+2B-C=2$$

$$-2A=3$$

Una vez que hemos resuelto este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de las constantes que son:

$$A=-\frac{3}{2} \quad B=\frac{5}{3} \quad C=-\frac{1}{6}$$

Es momento de sustituir los valores:

$$\frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$$

Después se integra:

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2}$$

Resolvemos las integrales del lado derecho por la formula $\int \frac{dx}{v} = \ln v + c$:

$$= -\frac{2}{3}\ln(x) + \frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + c$$

Usando propiedades logarítmicas el resultado final sería:

$$= ln\,\frac{(x-1)^{\frac{5}{3}}}{(x)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{6}}} + c$$

2. $\int \frac{(5x^2-36x+48)\,dx}{x(x-4)^2}$

Al obtener estos dos factores debemos percatarnos que estos se puedan reducir lo más posible. Utilizando el caso 2 la descomposición de fracciones parciales seria de esta manera:

$$\frac{(5x^2-36x+48)\,dx}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)}$$

Por lo cual A, B y C son constantes a determinar, por lo cual vamos a multiplicar ambos lados de la expresión por el denominador:

$$(5x^2-36x+48) = A(x-4)^2 + B(x) + C(x)(x-4)$$

$$(5x^2-36x+48) = Ax^2 - 8Ax + 16A + Bx + Cx^2 - 4Cx$$

Separamos por factor común:

$$(5x^2 - 36x + 48) = (A + C)x^2 + (-8A + B - 4C)x + (16A)$$

Posteriormente vamos a igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los dos términos del lado izquierdo, de manera que obtendremos tres ecuaciones:

$$A + C = 5$$

$$-8A + B - 4C = -36$$

$$16A = 48$$

Una vez que hemos resuelto este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de las constantes que son:

$$A = 3 \quad B = -4\ C = 2$$

Es momento de sustituir los valores:

$$\frac{(5x^2 - 36x + 48)\,dx}{x(x-4)^2} = \frac{3}{x} - \frac{4}{(x-4)^2} + \frac{2}{(x-4)}$$

Después se integra:

$$\int \frac{(5x^2 - 36x + 48)\,dx}{x(x-4)^2} = 3\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{(x-4)^2} + 2\int \frac{dx}{(x-4)}$$

Resolvemos las integrales del lado derecho por la formula $\int \frac{dx}{v} = \ln v + c$ y $\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}$:

$$= 3\ln(x) - \frac{4}{(x-4)} + \ln(x-4) + c$$

3. $\int \frac{4\,dx}{x^3+4x}$

El denominador de dicha fracción se pueda factorizar por factor común:

$$x(x^2+4)$$

Al obtener estos dos factores debemos percatarnos que estos se puedan reducir lo más posible. En este caso no es necesario factorizarlo más. Así que tomando como partida el caso 3 dicha fracción parcial que daría de esta forma:

$$\frac{4\,dx}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)}$$

Por lo cual A, B y C son constantes a determinar, por lo cual vamos a multiplicar ambos lados de la expresión por el denominador:

$$4 = A(x^2+4) + Bx + C(x)$$

$$4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

Separamos por factor común:

$$4 = (A+B)x^2 + (C)x + (4A)$$

Posteriormente vamos a igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los dos términos del lado izquierdo, de manera que obtendremos tres ecuaciones:

$$A + B = 0$$

$$C = 0$$

$$4A = 4$$

Una vez que hemos resuelto este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de las constantes que son:

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = 0$$

Es momento de sustituir los valores:

$$\frac{4\,dx}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+4)}$$

Después se integra:

$$\int \frac{4\,dx}{x(x^2+4)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+4)}$$

Resolvemos las integrales del lado derecho por la formula $\int \frac{dx}{v} = \ln v + c$:

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + c$$

Usando propiedades logarítmicas el resultado final sería:

$$= ln\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + c$$

$$4. \int \frac{\left(1-x+2x^2-x^3\right) dx}{x(x^2+1)^2}$$

Al obtener estos dos factores debemos percatarnos que estos se puedan reducir lo más posible. Utilizando el caso 4 la descomposición de fracciones parciales seria de esta manera:

$$\frac{(1-x+2x^2-x\hat{}3\ )\ dx}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Por lo cual A, B, C y D son constantes a determinar, por lo cual vamos a multiplicar ambos lados de la expresión por el denominador:

$$(1-x+2x^2-x^3) = A(x^2+1)^2 + Bx + C(x)(x^2+1) + Dx + E(x)$$

$$(1-x+2x^2-x^3) = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^3 + Dx^2 + Ex$$

Separamos por factor común

$$(1-x+2x^2-x^3) = (A+B)x^4 + (C)x^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + (A)$$

Posteriormente vamos a igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los dos términos del lado izquierdo, de manera que obtendremos tres ecuaciones:

$$A + B = 0$$

$$C = -1$$

$$2A + B + D = 2$$

$$C + E = -1$$

$$A = 1$$

Una vez que hemos resuelto este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de las constantes que son:

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = -1 \quad D = 1 \quad E = 0$$

Es momento de sustituir los valores:

$$\frac{(1 - x + 2x^2 - x\text{^}3\ )\ dx}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x-1}{(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Después se integra:

$$\int \frac{(1 - x + 2x^2 - x\text{^}3\ )\ dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x-1}{(x^2+1)} dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\ dx$$

Resolvemos las integrales del lado derecho por la formula $\int \frac{dv}{v} = \ln v + c$, $\int \frac{dv}{v^2+a^2}$, $\int v^n\ dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}$:

Usando propiedades logarítmicas el resultado final sería:

$$= \ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + arc\ tg\ (x) + \frac{1}{2} . \frac{(x^2+1)^3}{3} + c$$

Videos sugeridos:

https://www.youtube.com/watch?v=VhRb5A2Gihk&list=PLeySRPnY35dEHnMLZGaNEXgHzJ2-TPLWw&pp=iAQB

INTEGRALES DEFINIDAS

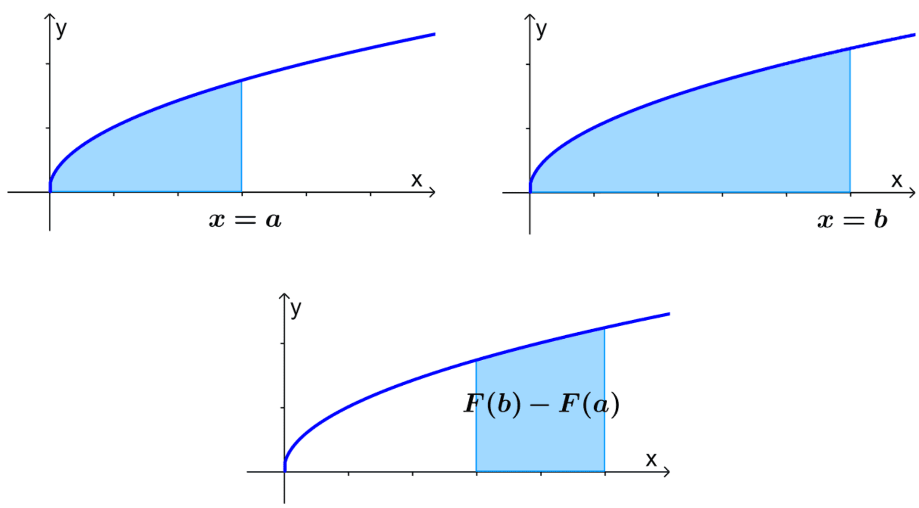
Proceso usado para encontrar la integral definida de una función

Supongamos que tenemos la integral $F = \int f(x)dx.$ Cuando resolvemos esta integral, no obtenemos un valor específico, sino que obtenemos una función de x.

Si es que queremos obtener un valor específico para F, tenemos que evaluarla en intervalos específicos. Entonces, tenemos:

$$F = (\text{Área hasta } x = b) - (\text{Área hasta } x = a)$$

$$= F(b) - F(a)$$



Esto se escribe como

$$F = \int_a^b f(x)dx$$

$F = \int_a^b f(x)dx$ es una **integral definida**, ya que nos da una respuesta definitiva.

- dx indica que la función debe integrarse con respecto a *x*.
- La constante a es el **límite inferior** de la integral.
- La constante b es el **límite superior** de la integral.

Entonces, si es que queremos resolver la integral $\int_0^1 2xdx$, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1: Encontrar la integral de la función y usar corchetes para encerrar a la expresión integrada y para expresar los límites de integración. En este caso, tenemos:

$$\int_0^1 2xdx = [x^2 + c]_0^1$$

Paso 2: Evaluar a la función en sus límites superior e inferior. La función en el límite superior es restada de la función en el límite inferior. Entonces, tenemos:

$$[x^2 + c]_0^1 = [(1)^2 + c] - [(0)^2 + c]$$

Paso 3: Simplificar hasta obtener un único valor numérico:

$$= [(1)^2 + c] - [(0)^2 + c]$$

Observamos que las constantes de integración fueron canceladas. Por esta razón, es normal excluir las constantes de integración cuando estamos trabajando con integrales definidas.

Videos sugeridos:

https://www.youtube.com/watch?v=K15rvmw2WwI